Chapitre 8

Espaces probabilisés

I. Généralités

Pour modéliser mathématiquement une expérience aléatoire, on doit faire plusieurs choix :

- Choix de l'**ensemble des issus possibles**, appelé **univers** et noté Ω.
- Choix de l'ensemble $\mathcal{A}$ des événements possibles. Un événement est un ensemble de plusieurs issus, l'ensemble de tous les événements possibles est appelé une **tribu**. Une tribu est donc un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$.
- Choix d'une façon d'associer une probabilité à chaque événement, c'est à dire une **fonction probabilité** $\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0;1]$.

1. Probabilités

a. Tribus

Définition 8.1

On considère un univers Ω associé à une expérience aléatoire. Une **tribu** sur Ω est un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui vérifie les conditions suivantes :

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- Si $A \in \mathcal{A}$, alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$
- Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$

On dit alors que le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est un **espace probabilisable**.

Exemple 8.1

- L'ensemble $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ contenant tous les sous-ensembles de Ω est une tribu.
- L'ensemble $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu.
- Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est fixé, alors $\mathcal{A} = \{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu.

Définition 8.2

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Un **événement** est une partie de Ω appartenant à $\mathcal{A}$. Un événement est donc un ensemble contenant certaines issus, et $\mathcal{A}$ est l'ensemble de tous les événements possibles.

Exemple 8.2

On lance un dé à 6 faces, on modélise cela par l'univers $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ et la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
L'événement A : « obtenir un nombre pair » est l'événement $A = \{2,4,6\}$. L'issue 4 réalise A.

Remarque

Une tribu est donc une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui contient Ω et qui est stable par passage au complémentaire et stable par union quelconque. En pratique, on aura presque toujours $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ pour des univers finis ou dénombrables, dans ce cas tout sous-ensemble de Ω est un événement.

La notion de tribu est hors-programme et il n'est pas indispensable de la maîtriser, il faut simplement savoir que $\mathcal{A}$ est l'ensemble de tous les événements.

b. Événements

Définition 8.3

- Un événement $\{\omega\}$ contenant une seule issue ω est appelé **événement élémentaire**
- L'événement Ω est l'**événement certain**.
- L'événement $\varnothing$ est l'**événement impossible**.

Propriété 8.1

Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω, alors

- $\varnothing \in \mathcal{A}$
- Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements de $\mathcal{A}$, alors $\bigcap A_i \in \mathcal{A}$
- Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Définition 8.4

On dit qu'une issue ω **réalise** un événement A si $\omega \in A$.

L'union et l'intersection de deux événements sont l'union et l'intersection au sens ensembliste. Le contraire d'un événement A, noté $\overline{A}$, est le complémentaire de A dans l'univers. D'après la définition et les propriétés d'une tribu, si $A, B \in \mathcal{A}$ alors $\overline{A}$, $A\cap B$ et $A \cup B$ sont dans $\mathcal{A}$.

- Une issue ω réalise $\overline{A}$ si elle ne réalise pas A
- Une issue ω réalise $A\cap B$ si elle réalise à la fois A et B
- Une issue ω réalise $A\cup B$ si elle réalise A ou B.

Remarque

On parle de **complémentaire** dans un contexte ensembliste et de **contraire** dans une contexte probabiliste.

Exemple 8.3

On lance un dé à 6 faces et on note le numéro obtenu.
On note A l'événement « Le numéro obtenu est supérieur ou égal à 3 » et B l'événement « Le numéro obtenu est impair ».
On peut noter $A = \{3,4,5,6\}$ et $B = \{1,3,5\}$.
Alors $A\cap B = \{3,5\}$ est l'événement « le numéro obtenu est impair et supérieur ou égal à 3 » et $A\cup B = \{1,3,4,5,6\}$ est l'événement « le numéro obtenu est impair ou il est supérieur ou égal à 3 ».

Remarque

Soient A et B deux événements, on a $A \subset B$ si et seulement si la réalisation de l'événement A entraîne la réalisation de l'événement B.

Exemple 8.4

On joue à un jeu à gratter et on note A l'événement « gagner plus de 10€ et B l'événement « gagner plus de 5€.
Peu importe par quel univers Ω et quelle tribu $\mathcal{A}$ on modélise cette expérience, il faut que $\forall \omega \in \Omega, \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$ car si A est réalisé alors B est réalisé aussi.

Définition 8.5

Soient A et B deux événements. On dit que A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

Remarque

Deux événements incompatibles sont deux événements qui ne peuvent pas se produire simultanément, par exemple pour une expérience dont l'issue est un nombre entier, les événements A : « obtenir un nombre pair »et B : « obtenir un nombre impair » sont incompatibles.

c. Espaces probabilisés

Définition 8.6

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Une **fonction probabilité** (ou simplement une **probabilité**) est une application

$$\mathbb{P} : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(A) \end{array}$$

qui à tout événement associe un réel, et qui vérifie les conditions suivantes :

- $\forall A \in \mathcal{A},\ 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Si $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles, alors $\mathbb{P}\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$ où $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$ est définie comme étant la limite de $\sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}(A_i)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

On dit alors que le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé**.

Remarque

L'axiome d'additivité donne en particulier pour deux événements A et B :

$$A \cap B = \varnothing \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Remarque

Le choix de Ω, de $\mathcal{A}$ et de $\mathbb{P}$ relève d'un choix de modélisation d'une expérience aléatoire, ce ne sont pas des caractéristiques intrinsèques d'une expériences aléatoires.

Définition 8.7

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $A \in \mathcal{A}$. On dit que A est

- **négligeable** si $\mathbb{P}(A) = 0$,
- **presque sûr** si $\mathbb{P}(A) = 1$.

.

2. Propriétés générales

a. Propriété d'une fonction probabilité

Propriété 8.2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient $A, B \in \mathcal{A}$ deux événements. Alors

- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ si $A \subset B$
- $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ si $A \subset B$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ (formule du crible)
- Si Ω est fini ou dénombrable, $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$
- Si Ω est fini ou dénombrable, $\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$

→ **Exercice de cours n° 1.**

On peut citer également la formule du crible généralisée, hors programme :

Propriété 8.3 (formule du crible généralisé)

Si (A_i) est une famille d'événements quelconque, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$

b. Cas d'équiprobabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé avec Ω **fini**.

Définition 8.8

On dit que l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est **équiprobable** (ou qu'on a une situation d'**équiprobabilité**) si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, c'est à dire si

$$\exists \lambda \in [0,1], \forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \lambda$$

On a alors

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

Remarque

Un espace probabilisé équiprobable sert à modéliser une expérience aléatoire dans laquelle il est raisonnable de penser que chaque issue a la même probabilité de se produire. C'est souvent le cas lorsqu'un énoncé dit qu'on choisit quelque chose « au hasard » dans un ensemble fini sans précision supplémentaire (ex : tirer une carte au hasard, lancer un dé équilibré, choisir une personne au hasard dans un groupe, etc.)

Propriété 8.4

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé avec $\mathbb{P}$ équiprobable, alors

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Exemple 8.5 : Le paradoxe des anniversaires

Déterminons, en fonction de n, la probabilité qu'au moins 2 personnes partagent la même date d'anniversaire dans un groupe de n personnes. (pour simplifier on ne tient pas compte des années bissextiles)

On suppose que les dates d'anniversaire sont réparties uniformément dans la population, donc que pour une personne donnée la probabilité qu'elle soit née un jour donné est $\frac{1}{365}$. Si l'on note B_n l'événement « dans un groupe de n personnes , au moins 2 personnes ont la même date d'anniversaire », alors l'événement $\overline{B_n}$ est « dans un groupe de n personnes, toutes ont une date d'anniversaire différente ».
On représente une date d'anniversaire par le rang du jour dans l'année. Soit $E = \{1, 2, ..., 365\}$ l'ensemble des dates anniversaire possibles. Choisir n personnes au hasard revient à choisir au hasard un n-uplet de E, donc l'univers de cette expérience aléatoire est $\Omega = E^n$. Choisir n personnes avec des anniversaires différents revient à choisir un n-arrangement de E (**attention :** les éléments de l'univers sont des listes ordonnées, donc une issue est une liste ordonnée).
On a donc

$$\mathbb{P}(\overline{B_n}) = \frac{A_{365}^n}{\text{card}(E^n)} = \frac{365!}{(365-n)!365^n} = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \cdots \times \frac{365-n+1}{365}$$

donc

$$\mathbb{P}(B_n) = 1 - \frac{A_{365}^n}{\text{card}(E^n)} = \frac{365!}{(365-n)!365^n} = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \cdots \times \frac{365-n+1}{365}$$

Le paradoxe (qui n'en est pas vraiment un) réside dans le fait que cette probabilité augmente très rapidement avec les valeurs de n :

- Pour $n = 10$, $\mathbb{P}(B_n) \simeq 0,12$
- Pour $n = 23$, $\mathbb{P}(B_n) \simeq 0,51$
- Pour $n = 39$, $\mathbb{P}(B_n) \simeq 0,87$

Ainsi dans un groupe de seulement 23 personnes il y a déjà plus d'une chance sur 2 pour qu'au moins deux personnes aient le même anniversaire. Notre intuition tend à confondre les probabilités avec notre ressenti subjectif : en effet, la probabilité qu'une personne dans un groupe de 23 ait le même anniversaire que vous est assez faible, seulement $1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{23} \simeq 0,06$

→ **Exercice de cours n° 2.**

II. Probabilités conditionnelles

Dans toute la suite on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Définition

Propriété 8.5

Soit B un événement de $\mathcal{A}$ de probabilité non nulle. L'application

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_B : & \mathcal{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \end{array}$$

définit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. La probabilité $\mathbb{P}_B(A)$ s'appelle **probabilité de A sachant B**. Elle représente la probabilité que l'événement A se réalise sachant que l'événement B est réalisé.
Elle se note aussi $\mathbb{P}_B(A) = P(A \mid B)$. On retient donc

♡

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

Définition 8.9

Deux événements A et B sont dit indépendants si $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$.

Remarque

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants} &\Longleftrightarrow \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &\Longleftrightarrow \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &\Longleftrightarrow P(A) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \end{aligned}$$

→ **Exercice de cours n°3.**

Propriété 8.6

Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants

2. Probabilités composées

Dans le cas d'une succession de plusieurs expérience aléatoires non indépendantes, on utilise la propriété des probabilités composées :

Propriété 8.7 (formule des probabilités composées)

Soit A un événement de probabilité non nulle et $B \in \mathcal{A}$ un événement. Alors

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}_A(B)$$

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ est une famille finie d'événements de probabilité non nulle, alors

$$\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\times\mathbb{P}(A_2|A_1)\times P(A_3|A_1\cap A_2)\times\cdots\times\mathbb{P}(A_n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})$$

Exemple 8.6 : Retour sur le paradoxe des anniversaires

On modélise cette fois-ci la situation par $\Omega = \{1,2,\dots,365\}$ et on considère qu'on répète l'expérience consistant à choisir une personne au hasard n fois. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on note A_k l'événement « parmi les k premières personnes choisies, au moins 2 ont le même anniversaire ».
Alors $\overline{A_k}$ est l'événement « parmi les k premières personnes choisies, toutes ont un anniversaire différent »
D'après la formule des probabilités composées on a :

$$\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)\times\mathbb{P}\left(\overline{A_2}\mid\overline{A_1}\right)\times\mathbb{P}\left(\overline{A_3}\mid\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\right)\times\cdots\times\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\mid\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_{n-1}}\right)$$

En supposant que les $k-1$ premières personnes ont des anniversaires différents, la probabilité que la k-ième ait un anniversaire différent des autres est $\dfrac{365-k+1}{365}$ (nombre de dates restantes divisé par le nombre de dates anniversaire possibles) donc

$$\mathbb{P}(\overline{A_n}) = 1\times\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\cdots\times\frac{365-n+1}{365}$$

On retrouve la même probabilité que dans l'exemple précédent.

→ **Exercice de cours n° 4.**

→ **Exercice de cours n° 5.**

Théorème 8.8 (Formule de Bayes)

Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A) \times \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}}$$

3. Systèmes complets d'événements

a. Définition

Définition 8.10

Un **système complet d'événement** (ou système **exhaustif**) est une famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements telle que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega \quad \text{et} \quad \forall (i,j) \in \mathbb{N}, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$$

C'est une famille d'événements deux à deux incompatibles dont l'union est Ω.
Avec le vocabulaire ensembliste : c'est une **partition** de Ω.

Exemple 8.7

- Si A est un événement, alors $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements.
- On choisit une lettre de l'alphabet au hasard. Alors $(\{a\},\{b\},\{c\},\dots,\{y\},\{z\})$ est un système complet d'événement. Plus généralement, $(\{\omega\})_{\omega\in\Omega}$ la famille de tous les événements élémentaires est un système complet d'événements.
- On choisit une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. Les événements « obtenir un coeur », obtenir obtenir un carreau », « obtenir un trêfle », obtenir un pique »forment un système complet d'événements.

b. Probabilités totales

Théorème 8.9 (Formule des probabilités totales)

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements, et soit $B \in \mathcal{A}$ un événement.
Alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}(B|A_k)$$

Le résultat reste vrai si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événement dénombrable :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}(B|A_n)$$

Remarque

On retient en particulier le cas d'un système complet formé d'un événement et de son contraire. Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{A}) \neq 0$, on a :

$$\boxed{\forall B \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B|\overline{A})}$$

→ **Exercice de cours n° 6.**

On peut généraliser le résultat de l'exercice précédent :

Proposition 8.10

Soient A et B deux événements quelconques de probabilité non nulle. Alors

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A) \times \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) \times \mathbb{P}\left(B|\overline{A}\right)}$$

et plus généralement :

Proposition 8.11

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et B un événement de probabilité non nulle, alors pour tout $k\in\mathbb{N}$ on a

$$\mathbb{P}(A_k|B)=\frac{\mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

→ **Exercice de cours n° 7.**

III. Théorème de la limite monotone

On considère un espace probabilisé quelconque $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et une suite (A_n) d'événements de $\mathcal{A}$.

Définition 8.11

On dit que la suite d'événements (A_n) est

- croissante si $\forall n\in\mathbb{N},\ A_n\subset A_{n+1}$,
- décroissante si $\forall n\in\mathbb{N},\ A_{n+1}\subset A_n$.

Théorème 8.12 de la limite monotone

Si (A_n) est une suite croissante d'événements, alors $(\mathbb{P}(A_n))$ est une suite numérique convergente, et

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n)=\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\Big)$$

Si (A_n) est une suite décroissante d'événements, alors $(\mathbb{P}(A_n))$ est une suite numérique convergente, et

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n)=\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n\Big)$$

Exemple 8.8

Paradoxe du singe savant : Un sage tape au hasard sur un clavier d'ordinateur indéfiniment. Quelle est la probabilité qu'il tape un jour la séquence de lettre suivante : « JENESUISPASUNSINGE » ?
Cette séquence contient 18 caractères. Il y a 26^{18} séquences de 18 caractères possibles avec 26 lettres, puisque cela revient à choisir un 18-uplet de l'ensemble $\{"a","b","c","d",\dots,"w","x","y","z"\}$.
Ainsi, pour chaque séquence de 18 caractères tapés par le singe, la probabilité que la séquence "JENSUISPASUNSINGE" apparaisse est $\frac{1}{26^{18}}$ (ce qui est très faible).
Notons A_n l'événement « Le singe n'a jamais tapé "JENESUISPASUNSINGE" au bout de la $n^{\text{ème}}$ séquence de 18 caractères ». La suite d'événements (A_n) est une suite décroissante : si A_{n+1} est réalisé, il n'a pas tapé cette séquence au bout de $n+1$ essais, donc a fortiori il ne l'a pas tapé au bout de n essais donc A_n est réalisé.
On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n)=\left(1-\frac{1}{26^{18}}\right)^n$ (c'est la probabilité de ne pas taper cette séquence n fois de suite).
L'événement $B=$« La séquence "JENESUISPASUNSINGE" n'apparait jamais parmi les séquences de 18 caractères tapés par le singe » est l'événement $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}A_i$. D'après le théorème de la limite monotone, on a

$$\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}A_i\Big)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n)=0$$

car $0\leq 1-\frac{1}{26^{18}}<1$. Ainsi, l'événement $\overline{B}=$« le singe tape au moins une fois "JENESUISPASUNSINGE" a pour probabilité 1, donc il est presque sûr.

Le paradoxe réside dans le fait que cet exemple reste vrai pour n'importe quel séquence de caractère, aussi longue soit elle. Un singe tapant indéfiniment sur un clavier d'ordinateur écrira "presque sûrement un jour" tout Hamlet, les Misérables et la critique de la raison pure.
En pratique la probabilité que cela arrive est tellement faible que le temps nécessaire pour que cela arrive serait largement supérieure à l'âge de l'univers, même en mettant à contribution autant de singes qu'il y a d'atomes dans l'univers.

Remarque

Dans l'exemple précédent, l'événement $\cap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ est non vide mais pourtant sa probabilité est nulle. De même, l'événement B n'est pas l'univers entier, mais sa probabilité est 1, d'où la distinction entre événement **négligeable** et événement **impossible** et celle entre événement **presque sûr** et événement **certain**.

→ **Exercice de cours n° 8.**

Corollaire 8.13

Soit (B_n) une suite d'événement quelconque. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} B_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k\right)$$

Exercices de cours

Exercice 1

On considère l'espace probabilisable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que l'application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ vérifiant l'axiome d'additivité et vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ définit une probabilité.

Exercice 2

Une main au poker est un ensemble de 5 cartes choisie au hasard de façon équiprobable dans un paquet de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir un carré (quatre cartes identiques) ?

Exercice 3

On pioche au hasard dans une urne contenant 15 jetons triangulaires et 25 jetons carrés.
Parmi les jetons triangulaires, 10 sont rouges et 5 sont bleus.
Parmi les jetons carrés, 10 sont rouges et 15 sont carrés.
On note la forme et la couleur du jeton tiré et on note A : « Le jeton tiré est rouge »et B : « le jeton tiré est triangulaire ». Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 4

Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. On en tire trois successivement et sans remise.
Calculer la probabilité de tirer deux numéros impairs puis un numéro pair.

Exercice 5

Une urne contient trois boules blanches et une boule noire. On effectue dans cette urne une suite de tirages. À chaque tirage, on note la couleur de la boule, et on la remet dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

- A_n : "La n-ième boule tirée est noire"
- B_n : "La n-ième boule tirée est blanche"

Calculer la probabilité de n'avoir tiré aucune boule noire au bout du n-ième tirage.

Exercice 6

Une maladie circule dans la population avec un taux d'incidence de 100 personnes pour 100 000. Un test permet de détecter si un individu est porteur de la maladie. Les caractéristiques de ce test sont les suivantes :

- Le test donne 2% de faux positifs, c'est à dire que la probabilité qu'une personne saine soit détectée comme malade est de $0,02$
- Le test donne 1% de faux négatifs, c'est à dire que la probabilité qu'une personne malade soit détéctée comme saine est de $0,01$

On choisit une personne au hasard dans la population et on la teste.

1. Quelle est la probabilité que le résultat du test soit positif ?
2. Si le résultat du test est positif, quelle est la probabilité que la personne soit malade ? Environ $0,98$?

Exercice 7

Soit $n \geq 1$. On considère $n+1$ urnes numérotées de 0 à n.
Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, l'urne numéro k contient k boules rouges et $n-k$ boules bleues. On choisit une urne au hasard puis on pioche une boule au hasard dans cette urne. On note B_k l'événement « la boite k a été choisie »et R l'événement « une boule rouge a été tirée ».

1. Déterminer $\mathbb{P}(R)$
2. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Les événements R et B_k sont-ils indépendants ?
3. Déterminer la probabilité qu'on ait sélectionné la boite numéro n sachant qu'on a tiré une boule rouge.

Exercice 8

On lance une pièce une infinité de fois. On note F_n l'événement « le n-ième tirage est face ».

1. Exprimer l'événement « l'un des dix premiers tirages est Face »à l'aide de la suite d'événements (F_n).
2. Exprimer l'événement « aucun des dix premiers tirages n'est Face »à l'aide de la suite d'événements (F_n).
3. Exprimer l'événement « tous les dix premiers tirages sont Face »à l'aide de la suite d'événements (F_n)
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = \bigcup_{k=0}^{n} F_k$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$ et interpréter ce résultat.